

Università di Roma Tre
AM1- Teoria dei limiti 2008-2009: APPELLO - 14/09/2009
Docente: Prof. Mario Girardi
Esercitatore: Dott. Maristella Petralla

Esercizio 1- Si determinino estremo superiore e inferiore, ed eventualmente massimo e minimo, dei seguenti insiemi:

(a) $\left\{ (-1)^n \frac{2n}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\};$

(b) $\left\{ \frac{3n+1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

Esercizio 2- Calcolare i seguenti limiti di successioni:

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{n^\alpha+n}$, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$;

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^{2n}-1)\cos^3 n}{n e^{3n}}$;

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+e^{3n+1}+5}{\log(n^2+1)+n}$.

Esercizio 3- Provare per induzione che $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4- Si consideri il sottoinsieme di \mathbb{R} , $E =] - \frac{\pi}{2}, 1[\cup \{ \tan(\frac{2n-1}{4n} \pi) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$. Si trovino i punti di accumulazione di E , i punti isolati, i punti interni.

Si trovi la chiusura di E , si stabilisca se E è un insieme chiuso, se è un insieme aperto, se è limitato.

Si trovino $\inf(E)$, $\sup(E)$ e si stabilisca se esistono minimo e/o massimo di E .

Esercizio 5- Studiare la convergenza ed eventualmente la convergenza assoluta delle seguenti serie:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log 3)^n}{2n+\frac{3}{2}};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)e^{-3n} \log n}{n};$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n \cos(n\pi)}{2n^2+1}.$